第 22 講　分点公式と平面ベクトル

22　平行四辺形 OACB に関して，線分 AC の中点を M，両端を除く線分 OA 上の点を T（つまり $\overrightarrow{OT}=\alpha\overrightarrow{OA}$ 〔$0<\alpha<1$〕とおく），線分 TC と線分 OM の交点を P，直線 AP と直線 OB の交点を Q，直線 AP と直線 BC の交点を R とする．

(1)　$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OR}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

(3)　点 R が点 P と点 Q の中点になるときの α の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　分点公式と平面ベクトル

22　三角形OABの2辺OA，OBをそれぞれ3：1，4：1に内分する点をC，Dとし，線分BCと線分ADの交点をP，線分CDと直線OPの交点をQとする．ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$とおくとき，

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ.

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ.

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　分点公式と平面ベクトル

22 平行四辺形OACBに関して，線分ACの中点をM，両端を除く線分OA上の点をT（つまり$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$〔$0<\alpha<1$〕とおく），線分TCと線分OMの交点をP，直線APと直線OBの交点をQ，直線APと直線BCの交点をRとする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$をそれぞれ$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ．

(3) 点Rが点Pと点Qの中点になるときのαの値を求めよ．

【答】 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解答】

OACBは平行四辺形より$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，Mは線分ACの中点より

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

(1) Pは線分TC上の点より，実数tを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OT}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=(1-t)\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=\{(1-t)\alpha+t\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せ，またPは線分OM上の点より，実数uを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OO}}+u\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{u}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases}(1-t)\alpha+t=u\\ t=\dfrac{u}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad t=\frac{\alpha}{1+\alpha},\ u=\frac{2\alpha}{1+\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

(2) Qは直線AP上の点より，実数vを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=(1-v)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left\{(1-v)+\frac{2\alpha}{1+\alpha}v\right\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せ，またQは直線OB上の点より，実数wを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-w)\overrightarrow{\mathrm{OO}}+w\overrightarrow{\mathrm{OB}}=w\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表せる．よって

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\begin{cases} (1-v)+\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}v=0 \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha}v=w \end{cases} \qquad \therefore \quad v=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha},\ w=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\alpha}{1-\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

R は直線 AP 上の点より，実数 x を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(1-x)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+x\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\ &=\left\{(1-x)+\frac{2\alpha}{1+\alpha}x\right\}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1+\alpha}x\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せ，また R は直線 BC 上の点より，実数 y を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=(1-y)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+y\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\ &=y\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases} (1-x)+\dfrac{2\alpha}{1+\alpha}x=y \\ \dfrac{\alpha}{1+\alpha}x=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad x=\dfrac{1+\alpha}{\alpha},\ y=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{2\alpha-1}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

(3)　R が線分 PQ の中点より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})\\ &=\frac{\alpha}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{\alpha}{1-\alpha^2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

となるので，これと(2)の結果より

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{1+\alpha}=\dfrac{2\alpha-1}{\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{1-\alpha^2}=1 \end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \qquad (0<\alpha<1 \text{ より})$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 22 講　分点公式と平面ベクトル

22　三角形 OAB の 2 辺 OA，OB をそれぞれ 3：1，4：1 に内分する点を C，D とし，線分 BC と線分 AD の交点を P，線分 CD と直線 OP の交点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とおくとき，

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

【選択肢】

(1)　㋐ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{7}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}$　㋑ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$　㋒ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(2)　㋐ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$　㋑ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{4}{9}\vec{b}$　㋒ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{9}\vec{b}$

【答】 (1) ㋒　(2) ㋐

【解答】

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{3}{4}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{4}{5}\vec{b}$ である．P は線分 CB 上の点より，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

と表せ，また P は線分 AD 上の点より，実数 u を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-u)\vec{a}+\frac{4}{5}u\vec{b}$$

と表せる．よって

$$\begin{cases}\frac{3}{4}(1-t)=1-u\\ t=\frac{4}{5}u\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}t=\frac{1}{2}\\ u=\frac{5}{8}\end{cases}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}}$$

(2)　Q は線分 OP 上の点より，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}$$

と表せるが，$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

とも表せる．これが線分 CD 上の点であるので

$$\frac{1}{2}k+\frac{5}{8}k=1\qquad\therefore\quad k=\frac{8}{9}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。